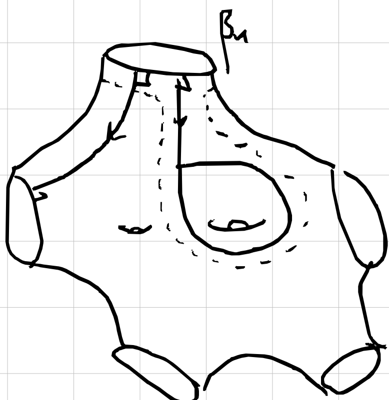
Récursion topologique et conséquences

Fin de la démo des identités de McShane

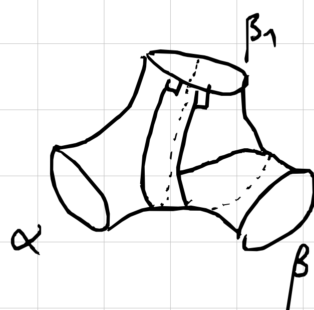


$\phi : x \mapsto P$ pantalon dont un des bords est β_1

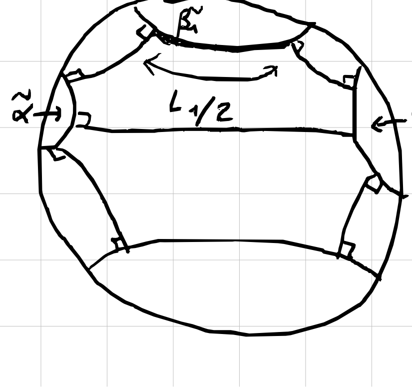
$$\mathrm{Leb}(\beta_1) = L_1 = \sum_P \mathrm{Leb}(\phi^{-1}(P))$$

Soit P donné :

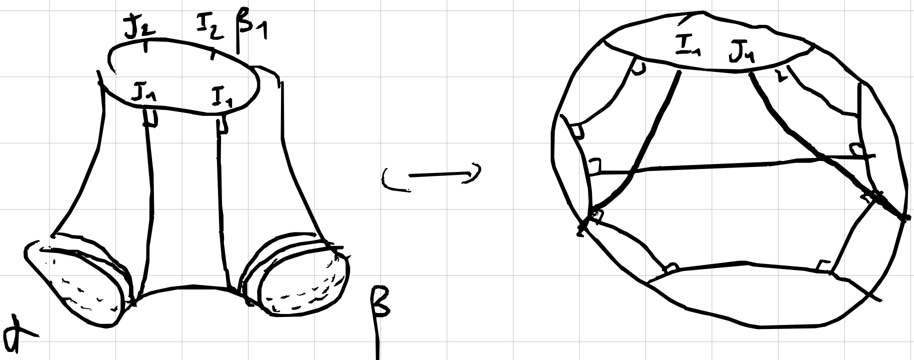
On identifie $\phi^{-1}(P)$



On décompose le pantalon en 2 hexagones isométriques via des orthogéodésiques



Il existe des géodésiques qui spiralent sur les bords :

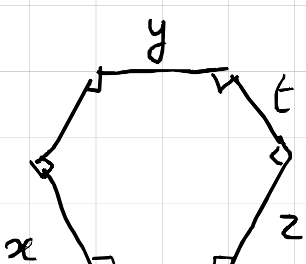


Si α, β courbes intérieures à $S^{g,n}$:

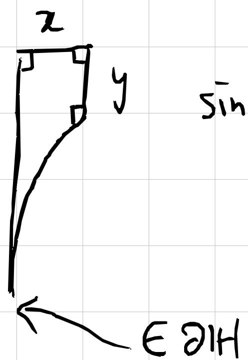
$$\Phi^{-1}(P) = \,]I_1, J_1[\, \cup \,]I_2, J_2[$$

(sinon

On applique des formules trigo :



$$\cosh(t) = \frac{\cosh(y)\cosh(z) + \cosh(x)}{\sinh(y)\sinh(z)}$$



$$\sinh(x)\sinh(y) = 1$$

On obtient :

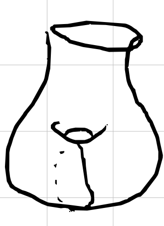
$$\mathrm{Leb}(\Phi^{-1}(P)) = \mathcal{D}(L_1, \ell(\alpha), \ell(\beta))$$

et si $\beta = \beta_j$ est une autre composante de bord,

$$\Phi^{-1}(P) = \left]I_1, J_1\right[\cup \left]I_2, J_2\right[\cup \left]I_1, I_2\right[$$

et on obtient $\mathrm{Leb}(\Phi^{-1}(P)) = \mathcal{R}(L_1, L_j, \ell(\alpha))$.

Application : volume de $\mathcal{M}_{1,1}(L)$



$$L = \sum_{\alpha \text{ géod. simples}} \mathcal{D}(L, \ell_X(\alpha), \ell_X(\alpha))$$

$$\Updownarrow$$

$$2L = \sum_{\vec{\alpha} \text{ géod. simple orientée}} \mathcal{D}(L, \ell_X(\vec{\alpha}), \ell_X(\vec{\alpha}))$$

Donc $\underbrace{2L \int_{\mathcal{M}_{1,1}(L)} 1 \, d\mu_{WP}}_{\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_{1,1}(L))} = \int_0^\infty \mathcal{D}(L,x,x)\, x\, dx$

$$2L\,\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_{1,1}(L)) = \int_0^\infty 2\log\left(\frac{e^{L/2}+e^{x}}{e^{-L/2}+e^{x}}\right) x\, dx$$

On a $\frac{\partial}{\partial L}\mathcal{D}(L,x,x) = \frac{1}{1+e^{x-L/2}} + \frac{1}{1+e^{x+\frac{L}{2}}}$

Donc $\frac{\partial}{\partial L}\left(2L\,\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_{1,1}(L))\right) = \int_0^\infty x\left(\frac{1}{1+e^{x-\frac{L}{2}}} + \frac{1}{1+e^{x+\frac{L}{2}}}\right) dx$

$$= 2\underbrace{\int_0^\infty \frac{y}{1+e^y}\, dy}_{\frac{\pi^2}{6}} + \underbrace{\int_0^{\frac{L}{2}} \left(y-\frac{L}{2}\right) dy}_{\frac{L^2}{8}}$$

Donc $\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_{1,1}(L)) = \frac{\pi^2}{12} + \frac{L^2}{48} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{L^2}{24}\right)$

$\rightarrow$ facteur $\frac{1}{2}$ par rapport aux formules de Mirzakhani.

Il existe une involution R ($R^2 = I$), appelée involution hyperelliptique, qui agit comme une isométrie quelle que soit la métrique hyperbolique
(envoie toute géod. simple sur elle-même en renversant l'orientation)

$\rightarrow$ $R \in MCG^+(S^{1,1})$: - non trivial
- agit trivialement sur $\mathcal{T}(S^{1,1})$

On a donc $\mathcal{M}(S^{1,1}) = MCG^+(S^{1,1}) \backslash \mathcal{T}(S^{1,1})$

$$= \left(MCG^+/\langle R \rangle\right) \backslash \mathcal{T}(S^{1,1}) \quad (*)$$

c'est de là que provient le facteur $\frac{1}{2}$: dans $(*)$ on quotiente par un espace 2 fois plus gros.

__NB:__ On note que $\mathrm{Vol}(\mathcal{M}_{1,1}(L))$ est un polynôme en L.

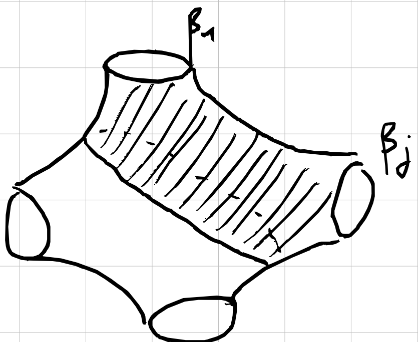
Récursion topologique : On suppose $n \geq 1$

$$L_1 = \sum_{\{\alpha,\beta\}} \mathcal{D}(L_1, \ell_X(\alpha), \ell_X(\beta)) + \sum_{j=2}^{n} \sum_{\beta} \mathcal{R}(L_1, L_j, \ell_X(\beta))$$

On intègre sur l'espace des modules:

$$L_1 \,\mathrm{Vol}\left(\mathcal{M}_{L_1,\dots,L_n}\left(S^{g,n}\right)\right) = A + B + C$$

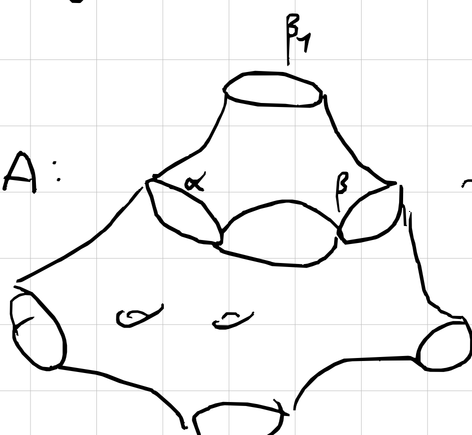
B:



Notation:
$V_{g,n}(L_1,\dots,L_n) = \mathrm{Vol}(\mathcal{M}_{g,n}(L_1,\dots,L_n))$

$$\sum_{j=2}^{n} \int_0^{\infty} R(L_1, L_j, x)\, V_{g,n-1}\left(x, (L_k)_{k\neq 1,j}\right) x\, dx = B$$

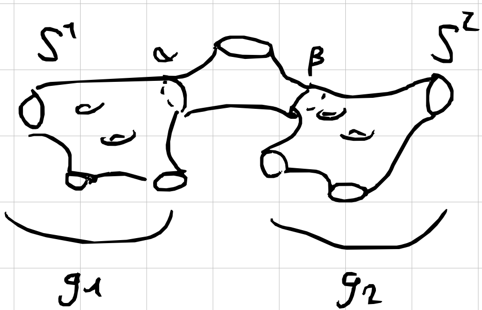
A:



$\rightsquigarrow$ $S^{g,n} \setminus P$ est connexe

$$A = \frac{1}{2} \int_{(0,\infty)^2} \mathcal{D}(L_1, x_1, x_2)\, V_{g-1,n+1}\left(x_1, x_2, (L_h)_{h\neq 1}\right) x_1\, dx_1\, dx_2$$

C : $S^{g,n} \setminus P$ pas connexe



avec $g_1 + g_2 = g$

$I \subset \{2, \dots, n\}$, $J \subset \{2, \dots, n\}$ composantes de bord

$I \sqcup J = \{2, \dots, n\}$

→ S^1 a genre g_1 et $|I|+1$ composantes de bord
S^2 a genre g_2 et $|J|+1$ " " "

Chaque donnée de (g_1, g_2), (I, J) correspond à une orbite sous l'action de MCG^+.

$$C = \sum_{\substack{g_1, g_2 : \\ g_1 + g_2 = g}} \sum_{I \sqcup J = \{2, \dots, n\}} \frac{1}{2} \int_{(0,\infty)^2} \mathcal{D}(L_1, x_1, x_2) V_{g_1, |I|+1}\left(x_1, (L_k)_{k \in I}\right) \times V_{g_2, |J|+1}\left(x_2, (L_k)_{k \in J}\right) x_1 x_2 \, dx_1 dx_2$$

Valeur absolue de la caract. d'Euler de $S^{g,n}$:

$$|\chi|(g,n) = 2g-2+n$$

On a : • $|\chi|(g-1,n+1) = |\chi|(g,n) - 1$

• $|\chi|(g_1,|I|+1) + |\chi|(g_2,|J|+1)$

$= 2g_1 - 2 + |I| + 1 + 2g_2 - 2 + |J| + 1$

$= 2g - 4 + 2 + n - 1 = |\chi|(g,n) - 1$

$\Rightarrow L_1 V_{g,n}(L_1,\dots,L_n)$ est exprimé en termes de fonctions $V_{g',n'}$ de caract. d'Euler + petite (en valeur absolue).

Théorème : $V_{g,n}(L_1,\dots L_n)$ est un polynôme en $\left(\frac{L_1^2}{2},\dots,\frac{L_n^2}{2}\right)$.

→ Mirzakhani a donné 2 preuves : une par récurrence, une via Duistermaat-Heckman.

Preuve par récurrence :

$$V_{g,n}(L_1, \dots L_n) = \sum_{\substack{d=(d_1,\dots d_n) \\ |d| \leq 3g-3+n}} c_d \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2d_i+1)!} \left(\frac{L_i^2}{2}\right)^{d_i}$$

$$c_d = c(d_1, \dots, d_n) = [\tau_{d_1} \dots \tau_{d_n}]_{g,n} \geq 0.$$

Formule de récurrence sur les c_d démontrée par Liu - Xu et Do - Norbury

Parenthèse : interprétation des coefficients c_d comme des intersections de classes de Chern de fibrés tautologiques $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$ sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ en droites complexes.

Cadre général : (M, ω) variété symplectique de dim $2k$.

$\phi_1^t, \dots \phi_n^t$ flots hamiltoniens périodiques $\phi_i^{t+1} = \phi_i^t$ qui commutent.

$$H = (H_1, \dots, H_n) : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
hamiltoniens

Thm (Duistermaat-Heckman)

On suppose 0 valeur régulière de H. Si $|a|$ est petit, $H^{-1}(a)$ sous-variété de dim $2k-n$

$M_a := \mathbb{T}^n \backslash H^{-1}(a)$ sous-variété de dim $2(k-n)$ → peut être munie d'une forme symplectique ω_a (par réduction symplectique)

$\mathrm{Vol}_{\omega_a}(M_a)$ est polynomial en $a = (a_1, \dots, a_n)$

$$\mathrm{Vol}_{\omega_a}(M_a) = \sum_{|\alpha| \leq k-n} C_\alpha a^\alpha$$

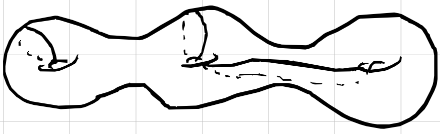
et $C_\alpha = \mathrm{cste} \cdot \int \phi_1^{\alpha_1} \dots \phi_n^{\alpha_n} \omega^{k-|\alpha|}$

$$\begin{array}{l} C_i \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

C_i fibré en cercle correspondant à l'action de ϕ_i^t

$\rightsquigarrow \phi_i$ classe de Chern

On applique le thm de Duistermaat-Heckman à la situation suivante :



$\vec{\gamma} = (\vec{\gamma}_1, \dots \vec{\gamma}_m)$ multicourbe à m composantes

$\Gamma = MCG^+(S^g)$, Γ' = sous-groupe engendré par $T_1, \dots T_m$ twists de Dehn et $MCG^+(S^g \setminus \gamma)$

$\Gamma' \backslash \mathcal{T}(S^g) = M$, muni de $\omega_{WP} = \sum_{i=1}^{m} dl_i \wedge d\theta_i + \omega_{WP}|_{M^g(S^g \setminus \gamma)}$

où $l_i = \ell_X(\gamma_i)$

θ_i = param. de twist le long de γ_i.
(modulo $\mathbb{Z} l_i$)

$H_1, \dots, H_m$: $H_i(X) = \frac{l_i^2}{2}$ a pour flot hamiltonien

$\phi_i^t : \theta_i \to \theta_i + t l_i$ et ne touche pas au reste.

$\to$ flot 1-périodique donc OK.

Donc $\mathrm{Vol}(M_{l_1, l_1, \dots l_m, l_m}(S \setminus \gamma))$ est polynomial en les $\frac{l_i^2}{2}$

et on a une interprétation des coef comme intersections de certaines classes de Chern.

→ Permet d'écrire $C_d = \underbrace{[\tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n}]}_{\text{apparaissent dans les travaux de Witten}}{}_{g,n}$

La récursion topologique démontre une conjecture de Witten

Csq sur l'asymptotique des $V_{g,n}$ en grand genre

(n fixé, $g \to \infty$)

- $C_{d_1+1, d_2, \ldots, d_n} \leq C_{d_1, \ldots, d_n} \leq C_{0, \ldots, 0} = V_{g,n}$

$$V_{g,n} = V_{g,n}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{\text{cusps}})$$

- $\ell_1 \cdots \ell_n V_{g,n}(\ell_1, \ldots, \ell_n) \leq V_{g,n} \sum_{|d| \leq 3g-3+n} \prod_{i=1}^{n} \frac{\ell_i}{2}^{2d_i+1} \times \frac{1}{(2d_i+1)!}$

$$\leq V_{g,n} \prod_{i=1}^{n} \frac{\sinh\left(\frac{\ell_i}{2}\right)}{\ell_i} \leq V_{g,n}\, e^{\sum_{i=1}^{n} \frac{\ell_i}{2}}$$

On peut également montrer :

- $V_{g,n} \geq V_{g-1,n+2}$

  $V_{g,n+1} \geq C(2g-2+n)\, V_{g,n}$

<u>Nie, Wu, Xue 2022 :</u>

$q \geq 0$, $n_1, \dots n_q$ fixés

$$\sum_{\substack{g_1, \dots g_q \\ \text{tq } \sum_{i=1}^{q} 2g_i-2+n_i = r \\ \text{et } 2g_i-2+n_i > 0}} V_{g_1,n_1} \cdots V_{g_q,n_q} \leq C\left(\frac{C}{r}\right)^{q-1} W_r$$

où $W_r = \begin{cases} V_{\frac{r}{2}+1,\,0} \\ V_{\frac{r+1}{2},\,1} \end{cases}$ selon le nb de comp. de bord

(en valeur absolue)

→ « À caractéristique d'Euler r grande (en valeur absolue), l'espace des modules pour les surfaces connexes domine les autres (en volume) »

Développements asymptotiques de Mirzakhani-Zograf

$$\frac{C_d^{g,n}}{V_{g,n}} = 1 + \frac{e_d^{(1),n}}{g} + \dots + \frac{e_d^{(k),n}}{g^k} + O\left(\frac{1}{g^{k+1}}\right)$$

$$4\pi^2(2g-2+n)\frac{V_{g,n}}{V_{g,n+1}} = 1 + \frac{a_1^{(n)}}{g} + \dots + \frac{a_k^{(n)}}{g^k} + O\left(\frac{1}{g^{k+1}}\right)$$

$$\frac{V_{g,n}}{V_{g-1,n+2}} = 1 + \frac{b^{(1),n}}{g} + \dots + \frac{b^{(k),n}}{g^k} + O\left(\frac{1}{g^{k+1}}\right)$$

$$V_{g,n} = \frac{\overset{\text{inconnu}}{C}\,(2g-3+n)!\,(4\pi^2)^{2g-3+n}}{\sqrt{g}}\left(1 + \frac{c_n^1}{g} + \frac{c_n^2}{g^2} + \dots\right)$$

Anantharaman-Monk 2022 : la dépendance en d de $\frac{C_d^{g,n}}{V_{g,n}}$ est polynomiale pour $|d|$ assez grand.